Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
- из математике -

Кружни праменови у инверзивној геометрији

Ментор:
мр Војислав Пантић

Ученик:
Јелена Илић IVд

Београд, јуни 2019. године

Садржај

1

Увод

„Лепота ствари постоји у уму који их посматра.”

Дејвид Хјум

Бављење геометријом упркос чињеници да изискује огромну количину стрпљења, отвара један невероватан, потпуно другачији поглед на свет, који нас уверава да лепота заиста лежи у очима посматрача.

Користећи идеје *инверзивне геометрије*, гране која несумњиво налази своје место у сферама интересовања многих математичара од самог настанка 1831. године када математичар Magnus[1] уводи појам инверзије, достижемо највиши ниво апстракције и елеганције, што можемо осетити на проблемима постављеним још у античко доба попут *Аполонијевих проблема о додиру кругова*, где конструкције инспирисане идејама *инверзивне геометрије* својом лепотом и једноставношћу бацају у сену до тада познате Еуклидске идеје.

Идеја овог рада је да кроз нестандардан приступ инверзији представљен на самом почетку другог поглавља прикажемо сегменте *инверзивне геометрије* који, на жалост, још увек не налазе место у средњошколској литератури.

Сматрајући познатом класичну дефиницију инверзије [10, стр. 181–182], као и њена основна својства, ово пресликавање дефинишемо на Еуклидској равни проширеној *идеалном* тачком у бесконачности.

[1] *L. J. Magnus (1790–1861)* је био немачки математичар.

Кружни праменови, упркос чињеници да не представљају прву асоцијацију када је реч о *инверзији*, суделују као главне карике у бројним конструкцијама које се заснивају на идејама *инверзивне геометрије*, стога им је посвећена пажња у трећем поглављу овог рада.

Посебна пажња у овом раду је посвећена често неправедно запостављеном сегменту инверзивне геометрије у чијем се средишту налазе инверзивни кругови, чији оригиналан назив (енгл. Circles of antisimilitude) звучи заиста застрашујуће.

Кружни праменови прожимају идеје *инверзивне геометрије* на којима се заснивају елегантне конструкције инверзивних кругова које су приказане у четвртом поглављу овог рада, док окосницу петог поглавља, у којем су представљене њихове невероватне примене, чине управо инверзивни кругови.

2

Рефлексија у односу на круг. Инверзивна раван

Дефиниција 2.0.1. *Слика тачке P при инверзији у односу на круг ω представља други пресек двају кругова управних на кругу ω који садрже тачку P, у случају када ова тачка не припада кругу ω. У супротном, слика тачке P при инверзији у односу на круг ω је сама та тачка.*

Претходна дефиниција представља *инверзивну дефиницију* инверзије, при чему оправдава назив *рефлексија у односу на круг* који се неретко користи када је реч о инверзији.

Како слика тачке P при рефлексији у односу на произвољну праву p представља други пресек двају кругова управних на правој p који садрже тачку P, постоји аналогија између рефлексије у односу на праву и инверзије, стога можемо проширити дефиницију круга посматрајући праву као *гранични случај*, круг бесконачног радијуса.

За круг дефинисан на овај начин кажемо да се инверзијом пресликава на круг. Проширујући Еуклидску раван додајући јој *идеалну* тачку у бесконачности сматрамо да управо та тачка представља заједничку тачку свих правих, то јест, кругова бесконачног радијуса.

Два круга који имају заједничку тачку P се или додирују у тој тачки, или тачка P представља једну од двеју пресечних тачака тих кругова.

Две паралелне праве представљају кругове бесконачног радијуса који се додирују у тачки P_∞, *идеалној* тачки у бесконачности.

Еуклидску раван проширену *идеалном* тачком у бесконачности називамо *инверзивном* (*конформном*) равни.

Средиште инверзије у односу на круг ω се при инверзији у односу на исти круг пресликава у тачку P_∞, *идеалну* тачку у бесконачности, при чему тачка P_∞ у складу са *инверзивном дефиницијом* инверзије представља други пресек правих које садрже средиште посматране инверзије, то јест, други пресек кругова бесконачног радијуса управних на кругу инверзије који садрже средиште истог.

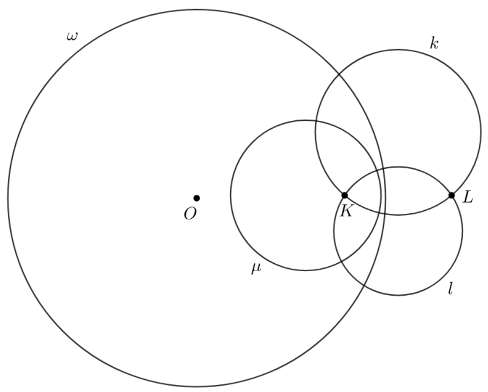
Инверзија дефинисана на инверзивној равни је *бијективно пресликавање.*

Теорема 2.1. Инверзијом се углови пресликавају у њима подударне углове [9, стр. 230–231].

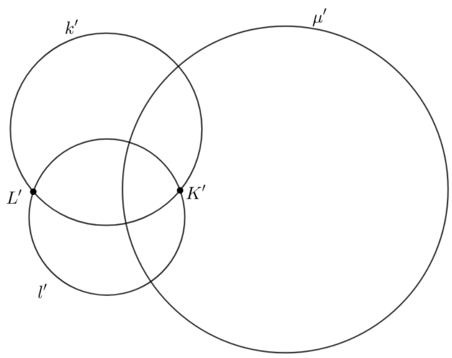
Последица 2.1. Управни кругови се инверзијом пресликавају на управне кругове.

Користећи *инверзивну дефиницију* инверзије, покажимо да се пар међусобно инверзних тачака K и L у односу на круг μ, при рефлексији у односу на произвољан круг ω, пресликава у пар међусобно инверзних тачака у односу на круг μ', при чему је μ' слика круга μ при инверзији у односу на круг ω.

Посматрајмо прво случај када ни једна од тачака K и L није средиште круга ω. На основу *инверзивне дефиниције* инверзије, тачка L представља други пресек кругова k и l, при чему кругови k и l представљају кругове управне на кругу μ који садрже тачку K (слика 2.1.1).



Слика 2.1.1



Слика 2.1.2

Како су кругови k и l управни на кругу μ, то су кругови k' и l', њихове одговарајуће слике при инверзији у односу на круг ω, управни на кругу μ'. Стога, користећи чињеницу да су тачке K' и L', редом, слике тачака K и L при инверзији у односу на круг ω, пресеци кругова k' и l', закључујемо да тачка K' представља слику тачке L' при рефлексији у односу на круг μ' (слика 2.1.2).

Напомена: Круг μ се при инверзији у односу на круг ω пресликава на круг ако средиште посматране инверзије не припада том кругу.

У супротном је слика круга μ при инверзији у односу на круг ω права, стога тачка K' представља слику тачке L' при рефлексији у односу на праву μ'.

На основу претходног закључујемо:

Инверзија у односу на круг ω трансформише рефлексију у односу на круг μ у рефлексију у односу на круг μ' ако средиште посматране инверзије не припада кругу μ.

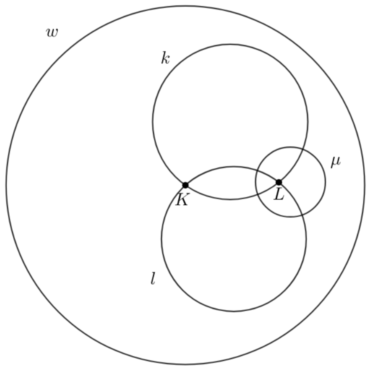
Инверзија у односу на круг ω трансформише рефлексију у односу на круг μ у рефлексију у односу на праву μ' ако круг μ садржи средиште посматране инверзије.

Напомена: Средиште круга μ се при рефлексији у односу на круг ω не пресликава у средиште круга μ'.

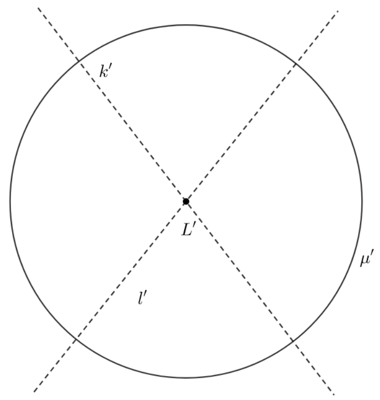
Како тачка P_∞ представља слику средишта круга μ при рефлексији у односу на исти круг, то тачка O, средиште круга ω, представља слику тачке M' при рефлексији у односу на круг μ', при чему је тачка M' слика средишта круга μ при рефлексији у односу на круг ω. Стога, закључујемо да слика средишта круга μ при рефлексији у односу на круг ω није средиште круга μ'.

Посматрајмо случај када тачка K одговара тачки O, средишту круга ω (слика 2.2.1).

Како је P_∞ слика тачке K при инверзији у односу на круг ω, то је управо *идеална* тачка у бесконачности слика тачке L' при рефлексији у односу на круг μ', стога закључујемо да је тачка L' средиште круга μ' (слика 2.2.2).



Слика 2.2.1



Слика 2.2.2

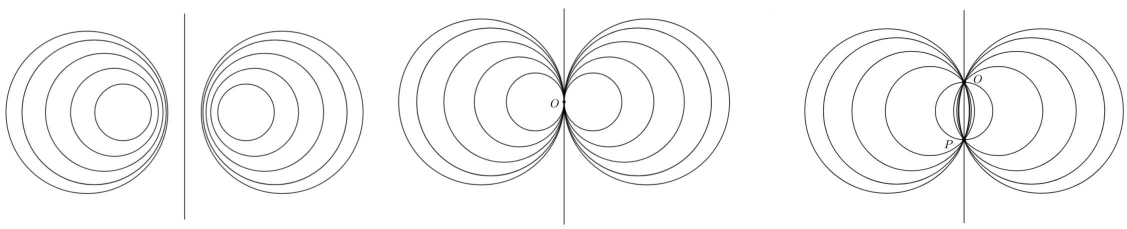
Другим речима, ако тачка L представља слику средишта круга ω при рефлексији у односу на круг μ, тада тачка L', слика тачке L при инверзији у односу на круг ω, представља средиште круга μ'.

У наставку рада ћемо увести појам *кружних праменова*.

3

Кружни праменови

Дефиниција 3.0.1. *Кружни прамен* је скуп свих кругова једне равни од којих свака два имају за радикалну осу исту праву s, коју називамо *осом* тога *прамена.*
Из претходне дефиниције непосредно следи да два различита неконцентрична круга k и l једнозначно одређују кружни прамен $\mathcal{K}$, при чему кружни прамен $\mathcal{K}$ такође може бити једнозначно одређен произвољним кругом k и правом s, која ће представљати *осу* прамена $\mathcal{K}$.
Нека су k и l два различита круга који одређују кружни прамен $\mathcal{K}$. На основу дефиниција кружног прамена и радикалне осе двају кругова закључујемо да ће сваки круг прамена $\mathcal{K}$ садржати тачке O и P уколико се k и l секу у овим двема тачкама. Слично, уколико се k и l додирују у тачки O, тада ће се свака два круга прамена $\mathcal{K}$ додиривати у тачки O, док ће у преосталом случају (случај када су k и l дисјунктни) свака два круга прамена бити дисјунктна.
Због тога разликујемо три врсте кружних праменова: прамен називамо *хиперболичким* ако су свака два круга прамена дисјунктна, ако се свака два круга прамена додирују у истој тачки, прамен називамо *параболичким*, док *елиптичким праменом* називамо прамен чији се кругови секу у двема различитим тачкама.



Хиперболички прамен   Параболички прамен   Елиптички прамен

Слика 3.1: Кружни праменови

Јасно је да су средишта кругова који припадају истом кружном прамену колинеарне тачке које припадају правој која је управна на оси тог прамена.

У наставку рада ћемо увести појам *управних праменова кругова*, стога, докажимо следеће две леме.

Лема 3.1. *Нека је k круг управан на једном од кругова k_1 и k_2, чије средиште припада радикалној оси ових двају кругова. Тада је круг k управан и на другом кругу.*

Доказ: Без умањења општости, посматрајмо случај када је круг k управан на кругу k_1. Јасно је да у овом случају квадрат полупречника круга k представља потенцију средишта истог круга у односу на круг k_1. Како средиште круга k, тачка O, припада радикалној оси кругова k_1 и k_2, то је потенција тачке O у односу на круг k_2 једнака потенцији исте тачке у односу на круг k_1, на основу чега закључујемо да је круг k управан и на кругу k_2, што је требало доказати. □

Лема 3.2. *Нека је k круг управан на круговима k_1 и k_2. Тада средиште круга k припада радикалној оси кругова k_1 и k_2.*

Доказ: Како је круг k управан на круговима k_1 и k_2, то је јасно да квадрат полупречника истог круга представља потенцију тачке O у односу на круг k_1, односно потенцију исте тачке у односу на круг k_2, при чему је тачка O средиште круга k, на основу чега закључујемо да средиште круга k припада радикалној оси кругова k_1 и k_2, што је требало доказати. □

Последица 3.2. Круг k управан на круговима k_1 и k_2 је управан на сваком кругу прамена $\mathcal{K}$ одређеног круговима k_1 и k_2.

Заиста, како средиште круга k припада радикалној оси кругова k_1 и k_2, односно оси кружног прамена $\mathcal{K}$, на основу тврђења леме 3.1. закључујемо да је круг k управан на сваком кругу прамена $\mathcal{K}$.

Напомена: Како квадрат полупречника круга k одговара потенцији средишта истог круга у односу на сваки од кругова k_1 и k_2 управних на кругу k, закључујемо да се средиште круга k не може налазити на сегменту радикалне осе кругова k_1 и k_2 одређеног пресечним тачкама ових двају кругова ако кругови k_1 и k_2 припадају елиптичком кружном прамену, односно, не може коинцидирати додирној тачки тих двају кругова у случају када кругови k_1 и k_2 одређују параболички кружни прамен.

Теорема 3.1. *Нека су $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$, редом, кружни праменови одређени круговима k_1 и k_2, односно, k_1' и k_2', при чему су кругови k_1' и k_2' управни на круговима k_1 и k_2. Тада је сваки круг прамена $\mathcal{K}$ управан на сваком кругу прамена $\mathcal{K}'$.*

Доказ: Нека је k' произвољан круг прамена $\mathcal{K}'$ различит од кругова k_1' и k_2'. Како су кругови k_1' и k_2' управни на круговима k_1 и k_2, то средишта кругова прамена $\mathcal{K}'$ припадају радикалној оси кругова k_1 и k_2, на основу чега закључујемо да средиште круга k' лежи на оси кружног прамена $\mathcal{K}$. Радикална оса произвољног круга k који припада кружном прамену $\mathcal{K}$ и круга k_1 одговара радикалној оси кругова k_1 и k_2, односно оси кружног прамена $\mathcal{K}$, стога, како је круг k_1 управан на сваком кругу прамена $\mathcal{K}'$, самим тим и на кругу k', закључујемо да је круг k' управан на кругу k, односно да је сваки круг прамена $\mathcal{K}$ управан на сваком кругу прамена $\mathcal{K}'$, што је требало доказати.$\square$

Дефиниција 3.0.2. Кружне праменове $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ називамо међусобно *управним праменовима кругова* ако је сваки круг прамена $\mathcal{K}$ управан на сваком кругу прамена $\mathcal{K}'$.

Јасно је да су осе двају међусобно управних праменова кругова $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ управне праве, при чему средишта кругова једног прамена припадају правој која представља осу другог.

Напомена: Непосредном провером закључујемо да се свака два круга прамена $\mathcal{K}'$ управног на параболичком прамену $\mathcal{K}$ додирују у додирној тачки кругова прамена $\mathcal{K}$.

Кругови прамена $\mathcal{K}'$ управног на хиперболичком кружном прамену $\mathcal{K}$ се секу у двема различитим тачкама.

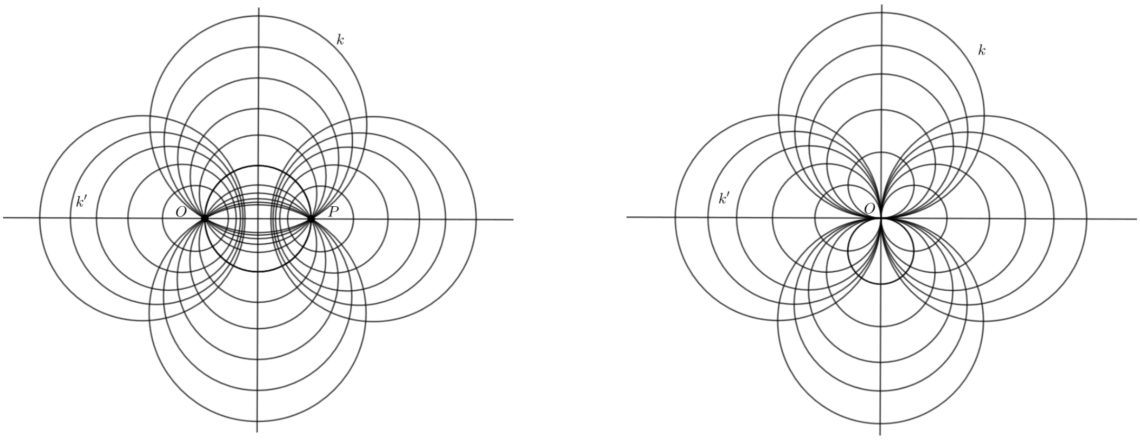
Нека су праве s и p осе двају међусобно управних праменова кругова $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$, при чему тачка Q представља пресечну тачку тих двеју правих. Тачке O и O', средишта двају произвољних кругова праменова $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ припадају, редом, правој p, односно правој s, стога, на основу Питагорине теореме важи следеће:

$$OO'^2 = r^2 + r'^2 = QO^2 + QO'^2,$$

односно

$$p(Q,k) = QO^2 - r^2 = -(QO'^2 - r'^2) = -p(Q,k'),$$

при чему су r и r' одговарајући полупречници међусобно управних кругова k и k'. На основу претходног закључујемо да пресечна тачка двеју правих s и p, тачка Q, представља додирну тачку кругова прамена $\mathcal{K}'$ у случају када иста тачка коинцидира додирној тачки кругова који припадају на њему управном параболичком кружном прамену $\mathcal{K}$, те је прамен кругова $\mathcal{K}'$ параболички. Вредност потенције тачке Q у односу на произвољан круг прамена $\mathcal{K}'$ управног на хиперболичком кружном прамену $\mathcal{K}$ је негативна, на основу чега закључујемо да се кругови прамена $\mathcal{K}'$ секу у двема различитим тачкама.



Слика 3.2: Управни праменови кругова

Средишта кругова хиперболичког кружног прамена $\mathcal{K}'$ припадају делу осе на њему управног елиптичког прамена $\mathcal{K}$ различитом од сегмента одређеног тачкама O и P, при чему ове две тачке представљају пресечне тачке кругова који припадају кружном прамену $\mathcal{K}$. Стога, уведимо појам *граничних тачака* хиперболичког прамена кругова.

Дефиниција 3.0.3. *Граничним тачкама*[1] хиперболичког прамена кругова $\mathcal{K}'$ називамо пресечне тачке кругова који припадају на њему управном елиптичком кружном прамену $\mathcal{K}$.

Теорема 3.2. *Нека су O и P граничне тачке хиперболичког кружног прамена $\mathcal{K}'$. Тада тачка O представља слику тачке P при рефлексији у односу на произвољан круг прамена $\mathcal{K}'$.*

Доказ: Произвољан круг k' хиперболичког кружног прамена $\mathcal{K}'$ је управан на сваком кругу елиптичког прамена кругова $\mathcal{K}$ чији се кругови секу у тачкама O и P. Како постоје два различита круга елиптичког прамена $\mathcal{K}$ управна на кругу k' који садрже тачку O, то на основу *инверзивне* дефиниције инверзије закључујемо да управо тачка P представља слику тачке O при рефлексији у односу на произвољан круг хиперболичког прамена $\mathcal{K}'$, што је требало доказати.$\square$

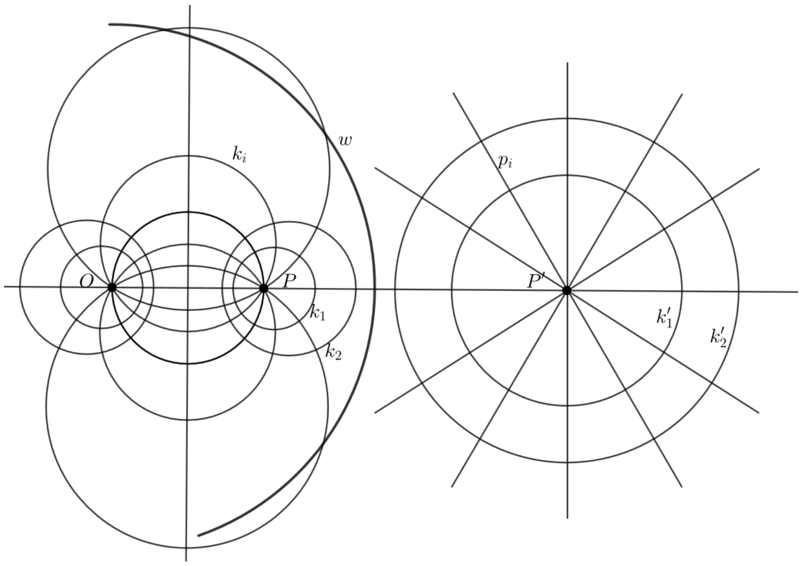
Напомена: Постоји јединствен пар тачака које су међусобно инверзне у односу на сваки круг хиперболичког прамена $\mathcal{K}'$.

[1] енгл. *limiting points*

Наиме, уколико би постојао још један пар тачака L и L' са истом особином, произвољан круг l који би садржао те тачке би био управан на сваком кругу прамена $\mathcal{K}'$, те би припадао елиптичком прамену $\mathcal{K}$ управном на прамену $\mathcal{K}'$. Како круг l сече праву која садржи средишта кругова прамена $\mathcal{K}'$ у тачкама L и L', односно у тачкама O и P, јасно је да ови парови тачака морају коинцидирати, те постоји јединствен пар тачака које су међусобно инверзне у односу на сваки круг хиперболичког прамена $\mathcal{K}'$.

Теорема 3.3. *Постоји инверзија која два различита круга хиперболичког прамена пресликава на два концентрична круга.*

Доказ: Нека су k_1 и k_2 два различита круга хиперболичког прамена $\mathcal{K}'$. Покажимо да се кругови k_1 и k_2 при рефлексији у односу на круг произвољног радијуса са средиштем у тачки O, једној од *граничних тачака* прамена $\mathcal{K}'$, пресликавају на два концентрична круга.



Слика 3.3

Кругови елиптичког прамена $\mathcal{K}$ управног на прамену $\mathcal{K}'$ се при посматраној инверзији пресликавају на праве које садрже тачку P', слику тачке P при посматраној рефлексији у односу на круг са средиштем у тачки O.

Како је сваки круг прамена $\mathcal{K}$ управан на сваком кругу прамена $\mathcal{K}'$, то ће слике кругова прамена $\mathcal{K}$ при посматраној инверзији бити управне на круговима k_1' и k_2', редом, сликама кругова k_1 и k_2 при рефлексији у односу на круг са средиштем у тачки O.

Стога, закључујемо да заједничко средиште кругова k_1' и k_2' одговара пресеку правих које представљају слике кругова елиптичког прамена $\mathcal{K}$ при посматраној инверзији, односно тачки P', те су ови кругови концентрични, чиме смо доказали да постоји инверзија која пресликава два круга *хиперболичког прамена* на два концентрична круга. □

Напомена: Рефлексију у односу на круг са средиштем у тачки O можемо представити као композицију рефлексије у односу на круг произвољног радијуса са средиштем истој тачки и одговарајуће хомотетије, на основу чега закључујемо да је однос полупречника концентричних кругова који представљају слике кругова k_1 и k_2 при инверзији у односу на круг са средиштем у тачки O константан.

Такође, за средиште инверзије која пресликава два различита круга хиперболичког прамена на два концентрична круга можемо узети и тачку P. У том случају се кругови k_1 и k_2 пресликавају на концентричне кругове чији је однос полупречника реципрочан односу полупречника концентричних кругова који представљају слике кругова k_1 и k_2 при рефлексији у односу на круг са средиштем у тачки O.

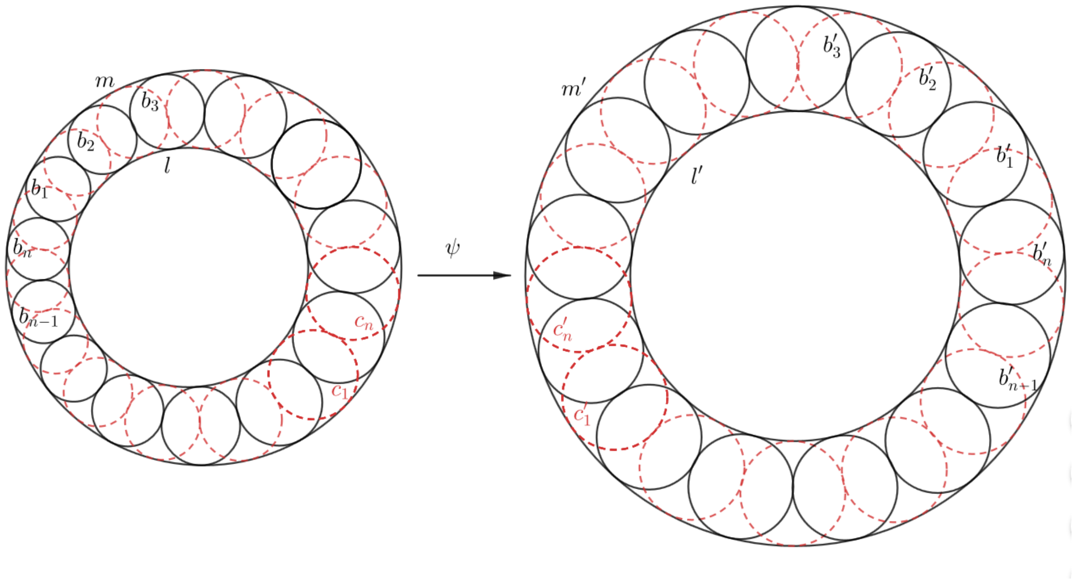
Користећи чињеницу да се два различита дисјунктна круга инверзијом могу пресликати на два концентрична круга, на крају овог поглавља дајемо елегантан доказ *Штајнеровог поризма.*

Теорема 3.4. (Штајнеров поризам[2]) *Нека је l круг у унутрашњости круга m, такав да постоји низ кругова b_1, b_2,..., b_n који додирују кругове l и m, при чему се свака два суседна круга у том низу, укључујући b_1 и b_n додирују. Нека је c_1 произвољни круг који додирује кругове m и l, и c_2,..., c_n кругови од којих сваки додирује кругове m, l и претходни у низу. Тада круг c_n додирује круг c_1.*

Доказ: Нека је ψ инверзија која пресликава дисјунктне кругове m и l на два концентрична круга m' и l' (случај када су кругови m и l концентрични је тривијалан). Даље, нека је $\mathcal{F}'$ слика ланца кругова $\mathcal{F}$ при инверзији ψ, при чему $\mathcal{F}$ представља ланац кругова b_1, b_2,..., b_n.

Како је пречник сваког круга ланца $\mathcal{F}'$ једнак разлици полупречника кругова m' и l', то су кругови b_1', b_2',..., b_n' међусобно конгруентни, при чему сваки додирује претходни у низу (слика 3.4).

[2]Поризам је математички проблем конструктивне природе за који или не постоји решење, или их постоји бесконачно много.



Слика 3.4

Круг c'_1 је конгруентан круговима ланца $\mathcal{F}'$, при чему овај круг представља слику круга c_1 при инверзији ψ. Посматрајмо $\mathcal{G}'$, ланац кругова добијен ротацијом ланца $\mathcal{F}'$ око заједничког средишта кругова m' и l' такав да се круг b'_1 поклапа са кругом c'_1. Како је први у низу кругова ланца $\mathcal{G}'$ управо круг c'_1, то кругови c_1, c_2,..., c_n припадају ланцу $\mathcal{G}$, при чему овај ланац представља слику ланца $\mathcal{G}'$ при инверзији ψ. Круг c'_1 додирује круг c'_n, стога је јасно да се њихове одговарајуће слике при инверзији ψ, кругови c_1 и c_n додирују, што је требало доказати. $\square$

Напомена: Претходно доказана теорема представља савршен пример *поризма*. Наиме, егзистенција једног ланца $\mathcal{F}$ обезбеђује егзистенцију бесконачно много ланаца $\mathcal{G}$ (генерисаних произвољним избором круга c_1).

Ипак, импликативни облик исказа теореме чини га тачним и у случају да ни један ланац кругова $\mathcal{F}$ уопште не постоји!

4

Конструкције инверзивних кругова

Дефиниција 4.0.1. Круг ω у односу на који се круг k рефлексијом пресликава на круг l називамо *инверзивним кругом*[1] кругова k и l.

Кружни прамен $\mathcal{K}$ одређен круговима k и l можемо *инверзивно* описати као прамен кругова који садржи кругове управне на круговима μ и λ, при чему је сваки од ових кругова управан на круговима k и l.

Покажимо да круг l, слика круга k при рефлексији у односу на круг ω, припада кружном прамену $k\omega$[2].

Наиме, како се кругови μ и λ, редом, управни на круговима ω и k при инверзији у односу на круг ω пресликавају сами на себе, то ће сваки од њих бити управан на кругу l. Стога, на основу *инверзивне дефиниције* кружних праменова закључујемо да круг l припада кружном прамену $k\omega$.

Последица: Круг ω, *инверзивни круг* кругова k и l, припада кружном прамену kl.

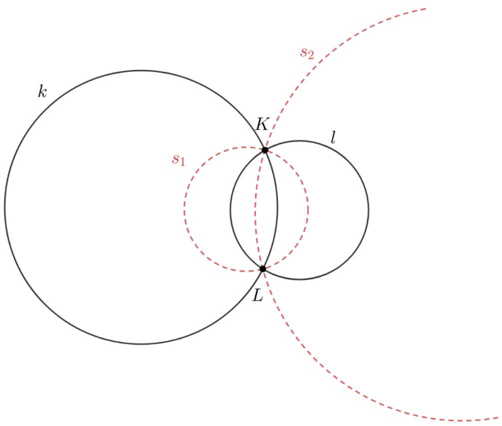
Напомена: Праве μ и λ, кругови бесконачног радијуса управни на концентричним круговима k и ω чија пресечна тачка P различита од *идеалне* тачке у бесконачности одговара средишту кругова k и ω, се при рефлексији у односу на круг ω пресликавају на себе, на основу чега закључујемо да средиште круга l одговара тачки P, заједничком средишту кругова k и ω.

[1] енгл. *mid-circle*

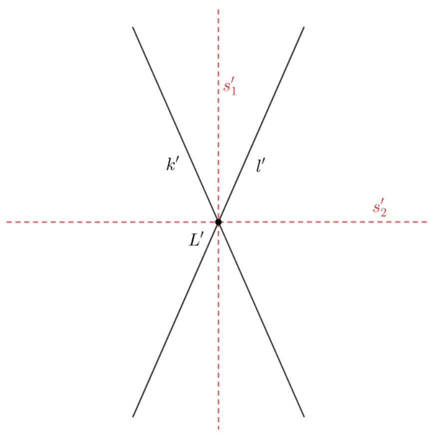
[2] У наставку рада ћемо ради једноставнијег записа за кружни прамен одређен круговима k и l користити ознаку kl.

У наставку поглавља ћемо се бавити конструкцијама *инверзивних кругова* кругова k и l.

Посматрајмо прво случај када кругови k и l одређују *елиптички кружни прамен* kl (слика 4.1.1).



Слика 4.1.1



Слика 4.1.2

Рефлексијом у односу на круг произвољног радијуса са средиштем у тачки K, једној од пресечних тачака ових двају кругова, кругови k и l се, редом, пресликавају на две праве, k' и l' (слика 4.1.2).

Покажимо да слике бисектриса углова које одређују праве k' и l' при рефлексији у односу на исти круг са средиштем у тачки K представљају *инверзивне кругове* кругова k и l.

Наиме, како се права k' рефлексијама у односу на праве s_1' и s_2' пресликава на праву l', то круг l представља слику круга k при рефлексијама у односу на кругове s_1 и s_2, те управо ови међусобно управни кругови елиптичког прамена kl представљају *инверзивне кругове* кругова k и l.

Напомена: Приметимо да се свака од правих s_1' и s_2' пресликава на круг при рефлексији у односу на круг са средиштем у тачки K ако ова тачка не припада ни једној од бисектриса углова одређених правама k' и l'. У супротном се једна од правих s_1' и s_2' при посматраној инверзији пресликава на себе, те како је један од *инверзивних кругова* кругова k и l радикална оса елиптичког прамена kl, закључујемо да су ови кругови конгруентни.

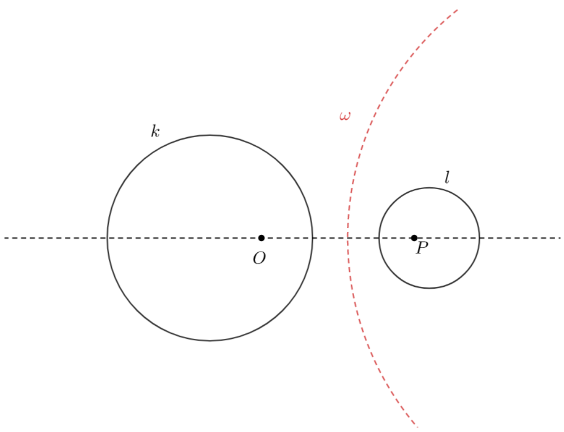
Конструкција *инверзивних кругова* кругова k и l је сада тривијална.

Наиме, ако кругови k и l нису конгруентни, средишта одговарајућих *инверзивних кругова* ових двају кругова налазимо у пресецима медијатрисе сегмента одређеног тачкама K и L и бисектриса углова између кругова k и l.

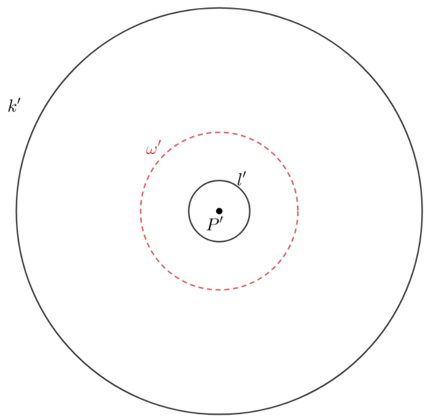
У супротном, један од *инверзивних кругова* кругова k и l је управо оса елиптичког прамена kl, док је други круг над пречником KL.

Конструкција *инверзивног круга* двају концентричних кругова k и l је тривијална.
Наиме, јасно је да круг ω, полупречника једнаког геометријској средини полупречника кругова k и l чије средиште коинцидира средишту ових кругова, представља *јединствен инверзивни круг* кругова k и l.

Посматрајмо сада случај када кругови k и l одређују *хиперболички кружни прамен* kl (слика 4.2.1).



Слика 4.2.1



Слика 4.2.2

Рефлексија у односу на круг произвољног радијуса са средиштем у тачки O, једној од *граничних тачака* хиперболичког кружног прамена kl, пресликава кругове k и l на два концентрична круга k' и l' (слика 4.2.2).

Покажимо да слика круга ω', који представља *инверзивни круг* кругова k' и l', при посматраној рефлексији у односу на круг са средиштем у тачки O представља *инверзивни круг* кругова k и l.

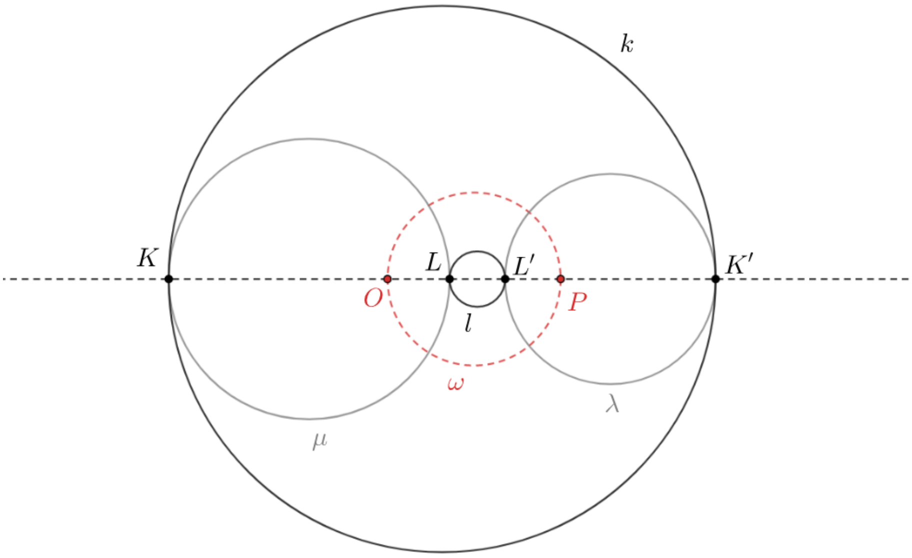
Наиме, како се круг k' рефлексијом у односу на круг ω' пресликава на круг l', круг l представља слику круга k при рефлексији у односу на круг ω, те овај круг хиперболичког прамена кругова kl представља *јединствен инверзивни круг* кругова k и l.

Напомена: Приметимо да је слика круга ω' при рефлексији у односу на круг са средиштем у тачки O круг, ако ова тачка не припада кругу ω'. У супротном се круг ω' при посматраној инверзији пресликава на праву, те како је *инверзивни круг* кругова k и l радикална оса хиперболичког прамена kl, закључујемо да су ови кругови конгруентни.

Пређимо на конструкцију *инверзивног круга* кругова k и l.

Нека су K и K', односно L и L', редом, пресечне тачке кругова k и l са правом која садржи средишта ових кругова, такве да пар тачака KL' *раздваја*[3] пар тачака LK'.

Покажимо да круг ω над пречником OP представља *инверзивни круг* кругова k и l, при чему O и P представљају *граничне тачке* хиперболичког прамена кругова $\mu\lambda$, где су μ и λ, редом, кругови над пречницима KL, односно $K'L'$ (слике 4.3 и 4.4).

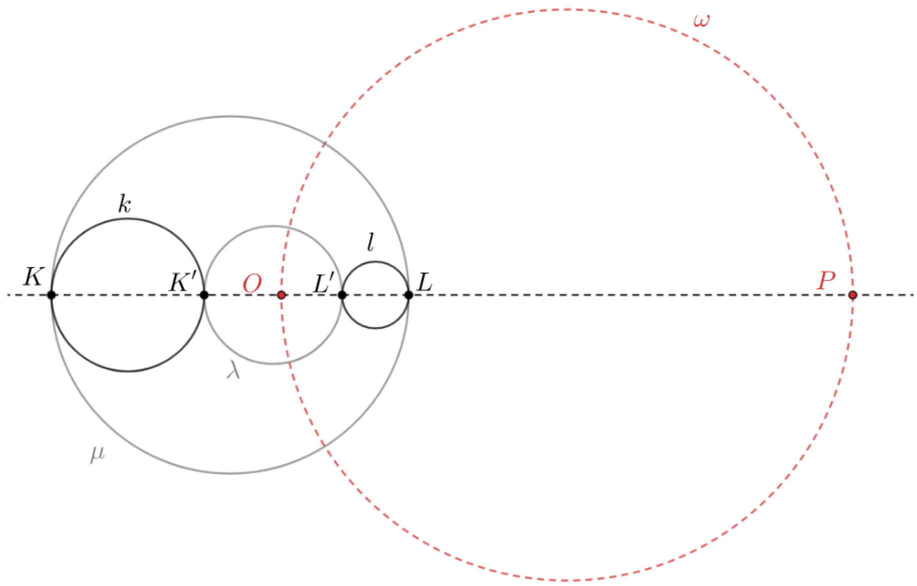


Слика 4.3

Круг ω припада елиптичком кружном прамену управном на хиперболичком прамену кругова $\mu\lambda$, стога је овај круг управан на сваком кругу прамена $\mu\lambda$, самим тим и на круговима μ и λ.

Како се тачка K рефлексијом у односу на круг ω пресликава у тачку L, док је слика тачке K' при инверизији у односу на круг ω тачка L', јасно је да се круг k рефлексијом у односу на круг ω пресликава на круг l, те круг ω хиперболичког прамена kl представља *јединствен инверзивни круг* кругова k и l.

[3]За пар тачака KL' кажемо да *раздваја* пар тачака LK' ако су тачке K, L, K' и L' колинеарне или припадају истом кругу, при чему се на сегменту одређеном тачкама K и L', односно на кружном луку који одређују ове тачке, налази тачно једна од тачака K' и L.



Слика 4.4

Посматрајмо преостали случај, случај када кругови k и l одређују *параболички прамен кругова.*

Рефлексија у односу на круг произвољног радијуса са средиштем у додирној тачки кругова k и l пресликава ове кругове, редом, на две паралелне праве, k' и l'. Како постоји јединствена права s' у односу на коју се рефлексијом права k' пресликава на праву l', то постоји *јединствен инверзивни круг* кругова k и l чија је конструкција слична конструкцији приказаној у претходном случају.

5

Примене инверзивних кругова

Дефиниција 5.0.1. За парове тачака LL' и MM' кажемо да су *ортоциклични* ако постоји круг који садржи тачке L и L', при чему се тачка M у односу на тај круг инверзијом пресликава у тачку M'.

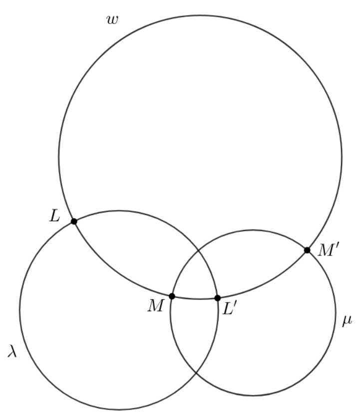
Показује се да је релација између *ортоцикличних* парова тачака LL' и MM' симетрична.

Наиме, ако постоји круг λ који садржи тачке L и L' у односу на који се тачка M инверзијом пресликава у тачку M', тада постоји круг μ који садржи тачке M и M' такав да је тачка L' слика тачке L при инверзији у односу на круг μ.

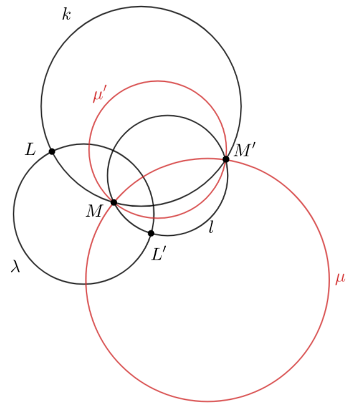
Посматрајмо прво случај када тачке L, L', M и M' припадају кругу ω (слика 5.1.1). Нека је μ круг који садржи тачке M и M' управан на кругу ω.

Покажимо да је управо μ круг у односу на који се инверзијом тачка L пресликава у тачку L'. Како круг μ садржи тачке M и M' које се инверзијом у односу на круг λ пресликавају једна у другу, то је круг μ управан на кругу λ. Круг μ је управан на круговима λ и ω, стога се, на основу *инверзивне дефиниције* инверзије, пресеци кругова λ и ω инверзијом у односу на круг μ пресликавају један у други.

Како су управо тачке L и L' пресеци кругова λ и ω, то се при рефлексији у односу на круг μ тачка L пресликава у тачку L', те је μ тражени круг.



Слика 5.1.1



Слика 5.1.2

Посматрајмо сада случај када тачке L, L', M и M' не припадају истом кругу (слика 5.1.2). Нека су k и l, редом, описани кругови око троуглова MLM' и $ML'M'$.

Покажимо да је управо један од *инверзивних кругова* кругова k и l круг у односу на који се инверзијом тачка L пресликава у тачку L'.

Како кругови k и l садрже тачке M и M' које се инверзијом у односу на круг λ пресликавају једна у другу, то је сваки од ових кругова управан на кругу λ. Круг λ је управан на сваком кругу елиптичког прамена kl, стога је тај круг управан и на круговима μ и μ', *инверзивним круговима* кругова k и l. Слика круга λ при инверзији у односу на сваки од кругова μ и μ' је сам тај круг, те се пресеци кругова λ и k сваком од претходно наведених инверзија пресликавају у пресеке кругова λ и l. Како тачка L представља једну од пресечних тачака кругова λ и k, то ће очигледно слика ове тачке при инверзији у односу на један од кругова μ и μ' бити управо тачка L'.

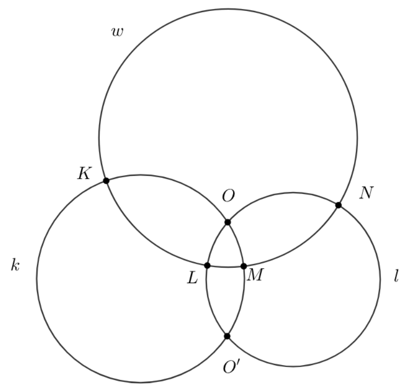
Дакле, ако се тачка L инверзијом у односу на круг μ пресликава у тачку L', круг μ је тражени круг, у супротном, тражени круг је круг μ'.

Напомена: Доказ тврђења у случају када тачке L, L', M и M' припадају једној правој је тривијалан. Наиме, круг μ над пречником MM' је круг у односу на који се инверзијом тачка L пресликава у тачку L'.

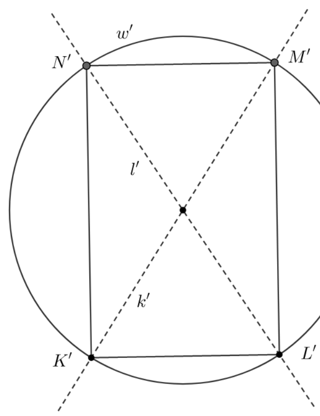
Случај у коме постоји тројка колинеарних тачака, при чему не припадају све четири тачке истој правој, може се доказати на исти начин као случај када тачке M, M', L и L' не припадају истом кругу, при чему никоје три нису колинеарне.

Лема 5.1. *Било које четири тачке које припадају истом кругу могу се инвертовати у темена правоугаоника.*

Доказ: Нека су K, L, M и N четири тачке које припадају кругу ω. Покажимо да се рефлексијом у односу на круг произвољног радијуса са средиштем у тачки O, једној од пресечних тачака кругова k и l, тачке K, L, M и N пресликавају у темена правоугаоника, при чему кругови k и l представљају кругове управне на кругу ω, који, редом, садрже парове тачака K и M, односно N и L (слика 5.2.1).



Слика 5.2.1



Слика 5.2.2

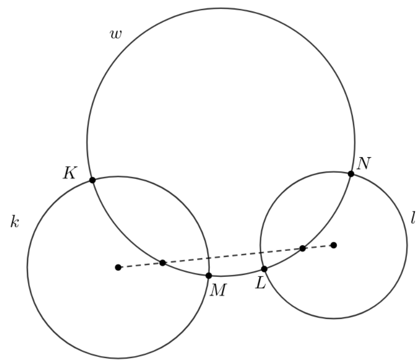
Како кругови k и l садрже средиште посматране инверзије, то ће k' и l', њихове слике при тој инверзији, бити праве управне на кругу ω', при чему је ω' слика круга ω при посматраној рефлексији у односу на круг са средиштем у тачки O. Сада се лако показује да тачке K', L', M' и N', слике тачака K, L, M и N при посматраној инверзији представљају темена правоугаоника (слика 5.2.2).

Наиме, како су праве k' и l' управне на кругу ω', то је пресек ових двеју правих средиште круга ω', те сваки од сегмената чије су крајње тачке K' и M', односно N' и L' представља пречник круга ω', на основу чега закључујемо да је $K'L'M'N'$ правоугаоник, чиме смо доказали да постоји инверзија која четири концикличне тачке пресликава у темена правоугаоника. $\square$

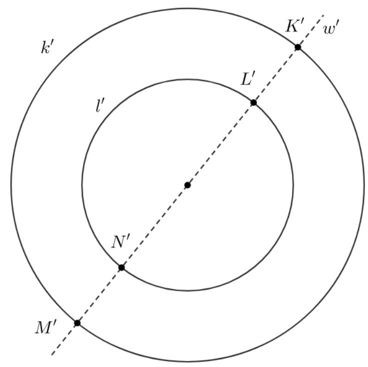
Напомена: За средиште инверзије којом се четири тачке које припадају истом кругу пресликавају у темена правоугаоника можемо узети и тачку O', при чему у овом случају слика тачке O при рефлексији у односу на круг произвољног радијуса са средиштем у тачки O' представља пресек двеју правих k' и l', односно средиште круга ω'.

Теорема 5.1. *Било које четири тачке K, L, M и N могу се инвертовати у темена паралелограма $K'L'M'N'$.*

Доказ: Посматрајмо прво случај када тачке K, L, M и N припадају кругу ω. У случају када пар тачака KM *раздваја* пар тачака LN, на основу претходно доказане леме, постоји инверзија која пресликава тачке K, L, M и N у темена правоугаоника $K'L'M'N'$.



Слика 5.3.1



Слика 5.3.2

Посматрајмо сада случај када тачке K, L, M и N припадају истом кругу, при чему пар тачака KM *не раздваја* пар тачака LN (слика 5.3.1). Нека су k и l кругови управни на кругу ω који садрже парове тачака K и M, односно L и N. Како је круг ω управан на круговима k и l хиперболичког прамена кругова kl, то *граничне тачке* овог хиперболичког прамена коинцидирају пресецима круга ω и праве која садржи средишта кругова k и l.

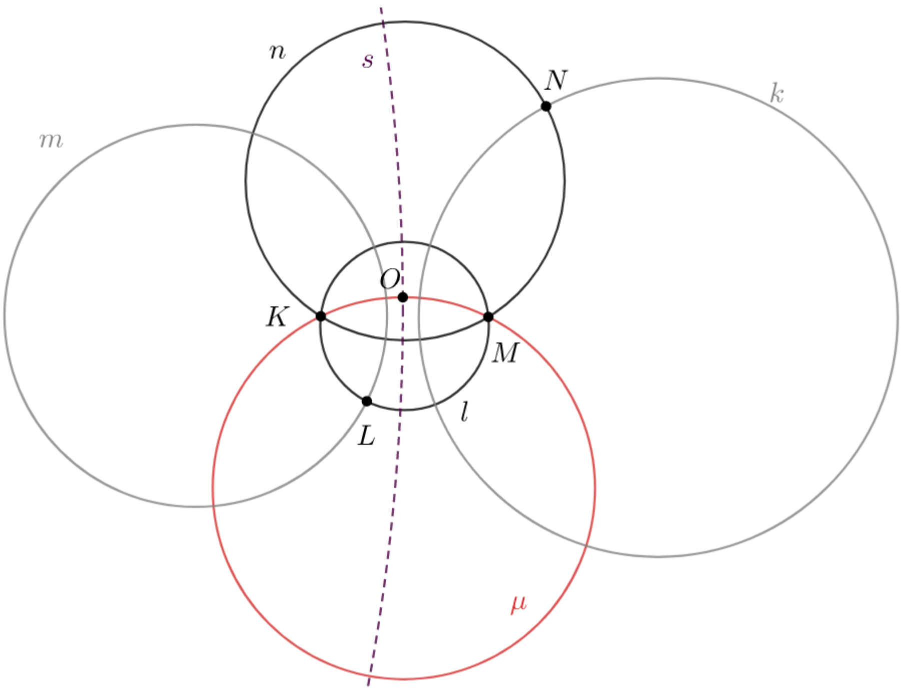
Инверзија са средиштем у једној од граничних тачака прамена кругова kl пресликава кругове k и l на два концентрична круга k' и l', при чему је ω', слика круга ω при истој инверзији, права. Слике тачака K, M, L и N при посматраној инверзији су колинеарне тачке које коинцидирају пресецима кругова k' и l' са правом ω' (слика 5.3.2).

Јасно је да тачке K', L', M' и N' представљају темена дегенерисаног[1] паралелограма, те и у овом случају постоји инверзија која пресликава четири тачке у темена дегенерисаног паралелограма.

[1]Под појмом дегенерисаног паралелограма подразумевамо четвороугао $K'L'M'N'$ чија су темена колинеарне тачке, при чему важи $K'L' = M'N'$ и $L'M' = K'N'$.

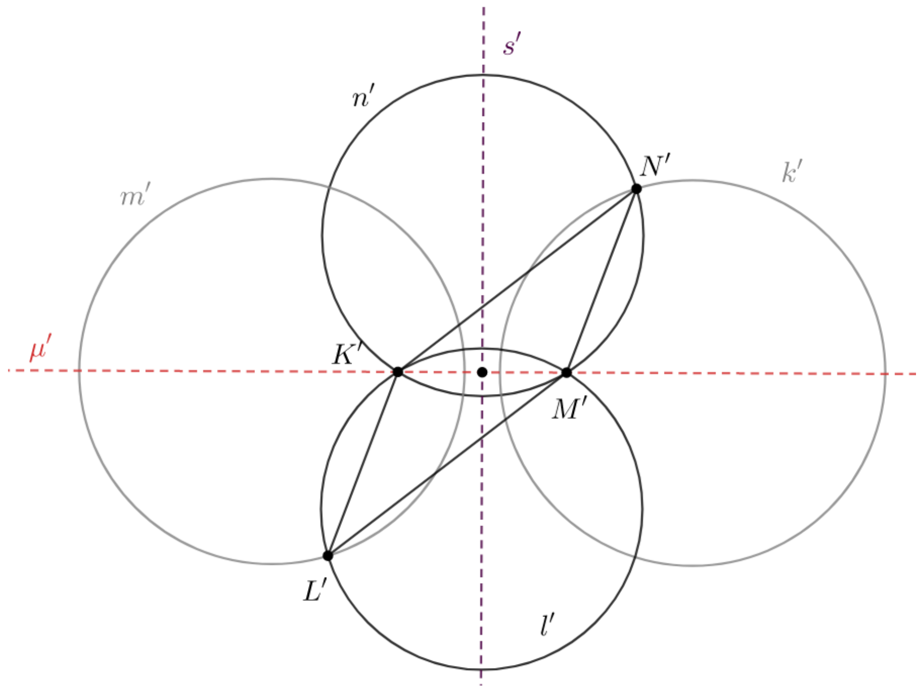
Остаје нам да размотримо случај када тачке K, L, M и N не припадају истом кругу (слика 5.4). Нека су n и l, редом, кругови описани око троуглова KNM и KLM. Даље, нека је круг μ *инверзивни круг* кругова n и l такав да се тачке L и N налазе са различитих страна тог круга.

Покажимо да инверзија у односу на круг произвољног радијуса са средиштем у једној од пресечних тачака круга μ са кругом s, *инверзивним кругом* кругова k и m, пресликава тачке K, L, M и N у темена паралелограма, при чему су кругови k и m управни на елиптичком прамену кругова nl, такви да круг k садржи тачку N, док круг m садржи тачку L.



Слика 5.4

Како круг s припада хиперболичком прамену кругова km, то је он управан на сваком кругу елиптичког прамена кругова nl, самим тим и на кругу μ. Посматрана рефлексија у односу на круг произвољног радијуса са средиштем у тачки O, једној од пресечних тачака кругова s и μ, пресликава кругове s и μ на две међусобно управне праве. Како се круг m рефлексијом у односу на круг s пресликава на круг k, то слика круга m при посматраној инверзији са средиштем у тачки O представља слику круга k' при рефлексији у односу на праву s', где су k' и s' одговарајуће слике кругова k и s при посматраној инверзији (слика 5.5).



Слика 5.5

Стога, закључујемо да су кругови k' и m' конгруентни, при чему је сваки од њих управан на правој μ'. Слично, кругови n' и l', слике кругова n и l при посматраној инверзији су конгруентни кругови, управни на правој s'. Сада се лако показује да се дијагонале четвороугла $K'L'M'N'$ полове, те је он паралелограм. Стога, постоји инверзија која четири произвољне тачке инвертује у темена паралелограма, чиме је тврђење доказано. □

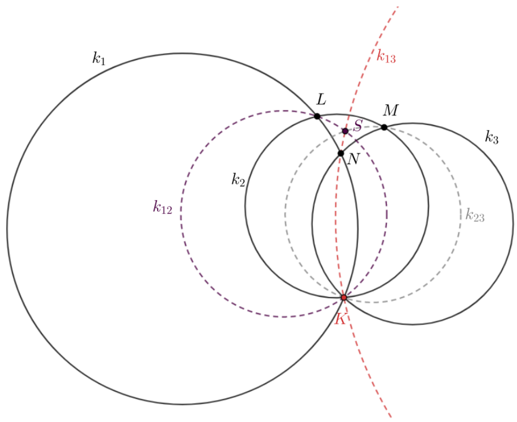
Напомена: У доказу претходне теореме разматрани су случајеви у којима никоје три тачке нису колинеарне.

Идеја која се користи при доказу тврђења у случају када тачке K, L, M и N припадају једној правој је слична идеји коју смо користили при доказу тврђења да се четири тачке које припадају једном кругу могу инвертовати у темена паралелограма.

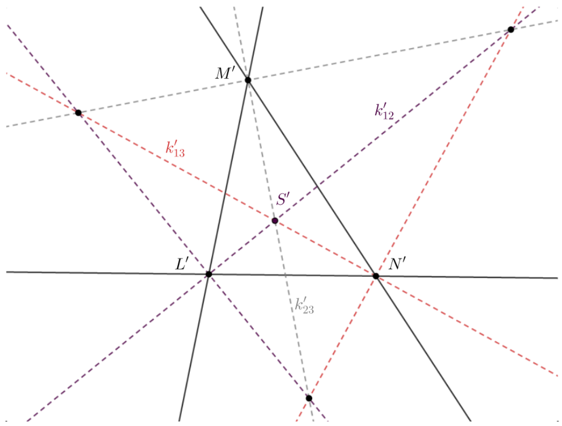
Случај у коме постоји тројка колинеарних тачака, при чему не припадају све четири тачке истој правој, може се доказати на исти начин као случај када тачке K, L, M и N не припадају истом кругу, при чему не постоји тројка колинеарних тачака.

Покажимо сада да постоји инверзија која пресликава четири тачке које не припадају истом кругу у темена троугла и његов ортоцентар.

Нека су K, L, M и N четири тачке које не припадају истом кругу. Кругови описани око троуглова KLM, KNM и KNL се инверзијом ψ у односу на круг произвољног радијуса са средиштем у тачки K, редом, пресликавају на праве одређене паровима тачака $L'M'$, $N'M'$, односно $N'L'$, док се њихови одговарајући *инверзивни кругови* пресликавају на бисектрисе углова троугла $M'L'N'$ (слика 5.6.2).



Слика 5.6.1



Слика 5.6.2

Бисектрисе спољашњих, односно унутрашњих углова троугла $M'L'N'$ се осим у теменима овог троугла и тачки S', средишту уписане кружнице истог, секу у тачкама које представљају средишта споља приписаних кружница троугла $M'N'L'$.

Покажимо да инверзија у односу на круг произвољног радијуса са средиштем у тачки S [2] (слика 5.6.1) пресликава тачке L, M, N и K , редом, у темена троугла и његов ортоцентар.

[2]Тачка S представља слику тачке S', средишта уписане кружнице троугла $M'L'N'$, при инверзији ψ.

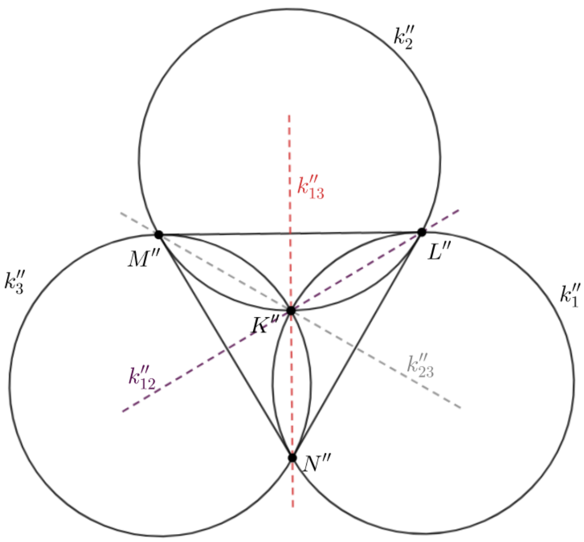
Како кругови k_{12}, k_{23} и k_{13} садрже средиште посматране инверзије (слика 5.6.1), то су k''_{12}, k''_{23} и k''_{13}, њихове одговарајуће слике при рефлексији у односу на круг произвољног радијуса са средиштем у тачки S праве.

Јасно је да кругови k''_1, k''_2 и k''_3, редом, слике кругова k_1, k_2 и k_3 при посматраној инверзији представљају конгруентне кругове који садрже тачку K''.

Наиме, како се круг k_1 рефлексијом у односу на круг k_{12} пресликава на круг k_2, то круг k''_1 представља слику круга k''_2 при рефлексији у односу на праву k''_{12}, стога закључујемо да су кругови k''_1 и k''_2 конгруентни. Слично, круг k''_3 је конгруентан круговима k''_1 и k''_2.

Сада се лако показује да су праве k''_{12}, k''_{23} и k''_{13}, редом, управне на правама одређеним паровима тачака $M''N''$, $N''L''$, односно $M''L''$, при чему тачке M'', L'' и N'' представљају друге пресеке трију конгруентних кругова k''_1, k''_2 и k''_3, на основу чега закључујемо да је тачка K'' ортоцентар троугла $M''L''N''$.

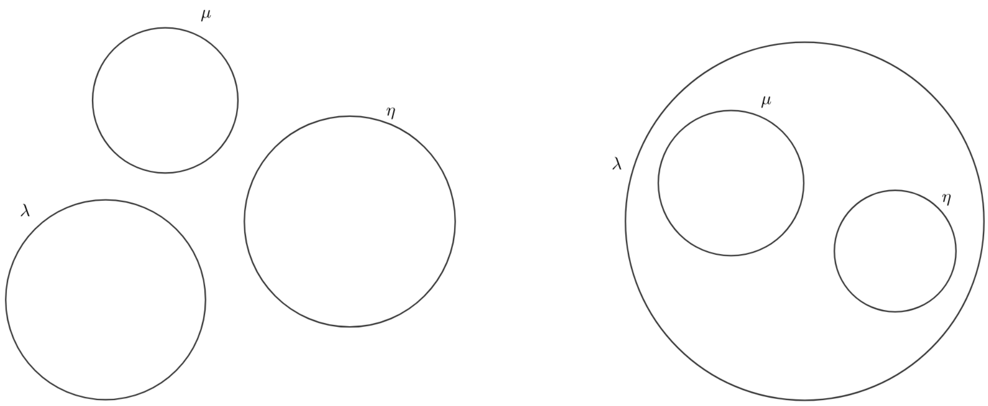
Стога, постоји инверзија која пресликава четири тачке које не припадају истом кругу у темена троугла и ортоцентар истог, што је требало показати.



Слика 5.7

Напомена: За средиште инверзије која пресликава тачке M, L, N и K, редом, у темена троугла и његов ортоцентар смо могли узети и неку од тачака које представљају слике средишта споља приписаних кружница троугла $M'N'L'$ при инверзији ψ.

Тројку међусобно дисјунктних кругова називамо *Аполонијевом тројком кругова* ако положај тих трију дисјунктних кругова одговара једном од положаја кругова на слици 5.8.



Слика 5.8

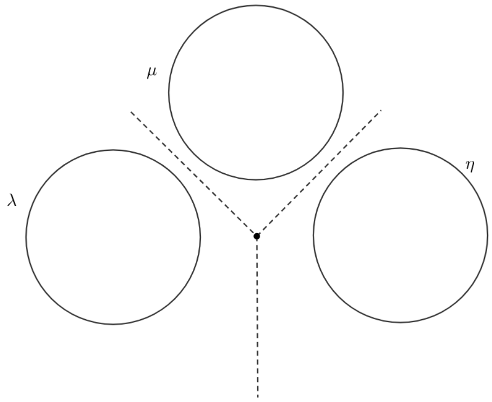
Следеће тврђење наводимо без доказа.

Теорема 5.2. Постоји инверзија која пресликава кругове *Аполонијеве тројке* на три међусобно конгруентна или хомотетична круга [6, стр. 11–13].

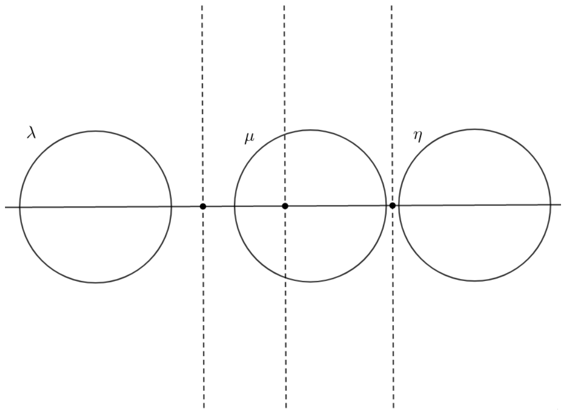
Користећи закључак претходне теореме, докажимо следеће тврђење:

Теорема 5.3. *Инверзивни кругови трију кругова Аполонијеве тројке припадају истом кружном прамену.*

Доказ: Посматрајмо прво случај када инверзија ψ пресликава кругове *Аполонијеве тројке* на три конгруентна круга.
Како *инверзивни кругови* трију конгруентних кругова представљају њихове радикалне осе, јасно је да тврђење важи у овом случају.
Наиме, радикалне осе трију конгруентних кругова су или конкурентне (слика 5.9.1), или паралелне (слика 5.9.2), стога закључујемо да кругови који представљају слике ових правих при инверзији ψ–*инверзивни кругови* кругова посматране *Аполонијеве тројке*–припадају елиптичком, односно параболичком прамену кругова.



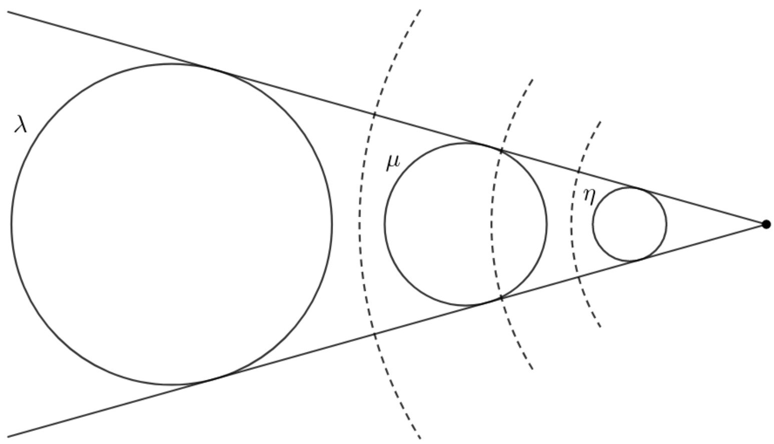
Слика 5.9.1



Слика 5.9.2

Посматрајмо сада случај када се кругови *Аполонијеве тројке* инверзијом ψ пресликавају на три хомотетична круга.

Инверзивни кругови трију хомотетичних кругова су концентрични кругови са средиштем у пресечној тачки правих које представљају спољашње заједничке тангенте тих кругова (слика 5.10).



Слика 5.10

Стога, кругови који представљају слике *инверзивних кругова* трију хомотетичних кругова при инверзији ψ припадају хиперболичком прамену кругова, што је требало доказати. □

6

Закључак

Концепт овог рада је замишљен тако да љубитељима математике, посебно геометрије, приближи сегмент инверзивне геометрије у чијем средишту се налазе *инверзивни кругови.*
Упркос чињеници да се сегмент инверзивне геометрије представљен у овом раду не обрађује на средњошколском нивоу, усвајајући чињеницу да се рефлексија у односу на круг при инверзији у односу на произвољан круг трансформише у рефлексију у односу на круг или у рефлексију у односу на праву, као и појам кружних праменова, средњошколац који се у претходном периоду свог школовања сусрео са инверзијом може без икаквих потешкоћа разумети идеје које се користе при конструкцијама *инверзивних кругова*, као и уживати у њиховим невероватним применама представљеним на самом крају рада, што нам је и био циљ.

Неизмерну захвалност дугујем свом ментору, професору Војиславу Пантићу, на огромној посвећености и подршци током израде самог рада, као и на невероватном ентузијазму којим је несумњиво обележио свако предавање из *Геометрије*, уверивши ме да је лепота када око изнова открије оно што ум већ по себи зна.

Литература

[1] Brannan, D. A.; Esplen, M. F. and Gray, J. J. (1999). *Geometry.* Cambridge: Cambridge University Press.

[2] Court, N. A. (2007). *College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle.* New York, NY: Dover Publications Inc.

[3] Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to Geometry*, 2nd ed. New York, NY: John Wiley and Sons Inc.

[4] Coxeter, H. S. M. (1971). *Inversive Geometry.* Educational Studies in Mathematics, Vol. 3, pp. 310–321.

[5] Coxeter, H. S. M. (1968). *Mid-Circles and Loxodromes.* The Mathematical Gazette, Vol. 52, No. 379, pp. 1–8.

[6] Coxeter, H. S. M. (1968). *The Problem of Apollonius.* The American Mathematical Monthly, Vol. 75, No. 1, pp. 5–15.

[7] Coxeter, H. S. M. and Greitzer, S. L. (1967). *Geometry Revisited.* New York, NY: The Mathematical Association of America.

[8] Johnson, R. A. (1960). *Advanced Euclidean Geometry.* New York, NY: Dover Publications Inc.

[9] Лучић, З. (1997). *Еуклидска и хиперболичка геометрија.* Београд: Математички факултет.

[10] Митровић, М.; Огњановић, С.; Вељковић, М.; Петковић, Љ.; Лазаревић, Н. (2013). *Геометрија за први разред Математичке гимназије.* Београд: Круг.